

INTRODUCTION AU TRAITEMENT NUMÉRIQUE DES SIGNAUX : SIGNAUX ÉCHANTILLONNÉS.

1. PRÉSENTATION

Il faut se rendre à l'évidence : Le traitement d'une information électrique s'effectue de plus en plus souvent sous forme numérique, au détriment des techniques analogiques classiques. C'est donc que le traitement sous forme numérique des signaux présente maintenant plus d'avantages que le traitement analogique.

1.1 Caractéristiques essentielles des techniques analogiques et numériques.

Le plus gros inconvénient des systèmes analogiques est sans doute leur sensibilité à toutes sortes de perturbations, ce qui concourt rapidement à la dégradation de l'information :

Les « bruits » sont des signaux parasites, issus des composants eux mêmes, ou de sources extérieures, par couplages (capacitif, inductif ...). L'élimination, ou seulement la réduction de ces bruits, est souvent délicate et fait appel à des techniques spécifiques (blindages, plans de masse, étages à découpage, détection synchrone, corrélation ...)

De plus, les étages ainsi rajoutés sont eux mêmes des sources de bruit, si bien que plus une chaîne de traitement analogique se complique, et plus les signaux y auront de chance de se dégrader !

Les risques d'instabilité sont communs : Par couplage, il peut apparaître des boucles, sièges d'oscillations parasites.

Les points de repos des composants actifs consomment de l'énergie en pure perte. Ils sont également sujets à des dérives de toutes sortes : Variation de température, d'hygrométrie, vieillissement des composants ...

La mémorisation de l'information analogique n'est envisageable que par recours à un support magnétique ; l'état magnétique de ce support sera facilement influencé par tout champ magnétique extérieur.

Enfin une chaîne de traitement analogique ne peut s'adapter à des applications diverses qu'au prix d'une modification de sa structure. (on parle d'architecture matérielle)

Inversement, dans un système de traitement numérique, le fait de travailler avec des « 0 » et des « 1 » logiques, qui correspondent à des niveaux pouvant varier dans une large mesure, confère à la technique numérique une **grande insensibilité aux bruits et aux dérives.**

Si, par malheur, un bit de poids important était le siège de changements d'états intempestifs, l'effet en serait annulé par des **systèmes de contrôle** quasiment infaillibles (contrôle de parité, de redondance, codes détecteurs d'erreurs...) qui sont impossibles à mettre en oeuvre en analogique.

La complexité d'une chaîne de traitement numérique ne nuit en rien à la qualité de l'information, bien au contraire : Il y a régénération des niveaux logiques lors du passage d'une information dans une structure numérique !

Le traitement numérique est « simple » . Il s'appuie sur les règles de l'algèbre binaire, et les composants de base sont largement diffusés et standardisés : Un microprocesseur est maintenant un composant presque aussi vulgaire qu'un transistor !

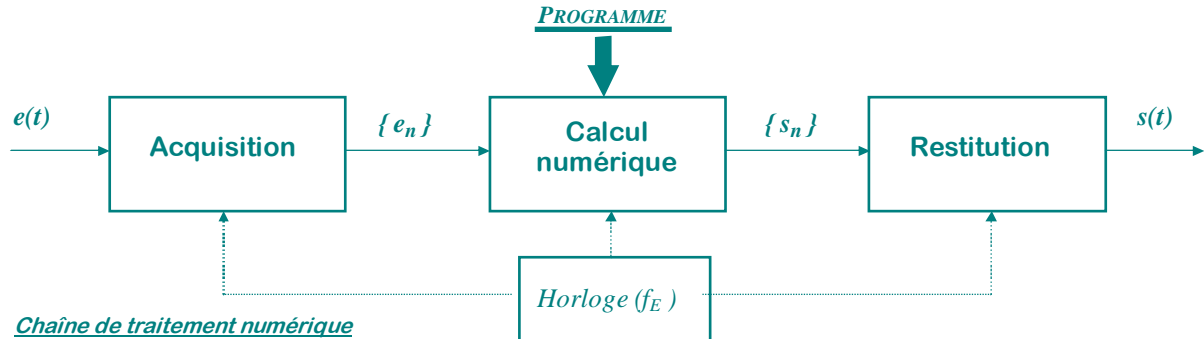
Enfin, l'architecture d'un système de traitement numérique est dite logicielle : Il suffit de modifier quelques éléments d'un programme pour changer la nature du traitement de l'information effectuée ; un système de traitement numérique est ainsi auto adaptatif.

Cependant, tout n'est pas parfait dans le traitement numérique : Le fait de coder la valeur d'un signal sur n bits entraîne une erreur d'approximation systématique, nommée erreur de quantification. Nous verrons plus loin quelles en sont les conséquences.

1.2 Architecture d'une chaîne de traitement numérique.

Le problème posé est simple : Comment s'articule une chaîne qui, à partir d'un signal analogique $e(t)$, peut élaborer un signal analogique $s(t)$, en passant par un traitement numérique intermédiaire ?

Le cœur d'un tel système est une **unité de calcul numérique** qui exécute un programme. Cette unité travaillant sur des nombres codés en binaire, elle est précédée d'une **unité d'acquisition** et suivie d'une **unité de restitution** :



L'ensemble du système est cadencé par une horloge de fréquence f_E , appelée **fréquence d'échantillonnage**. (en anglais : sampling frequency)

1.2.1 Acquisition.

Ce sous-système est chargé de transformer le signal analogique $e(t)$ en une séquence de nombres binaires qu'on note $\{e_n\}$: Ces nombres se succèdent avec une fréquence de rafraîchissement égale à la fréquence f_E .

Cette opération est réalisée par un ensemble de trois fonctions secondaires :

→ **Echantillonnage** → **Blocage** → **Conversion analogique-numérique**

Échantillonner $e(t)$ consiste à prélever périodiquement sa valeur, à des dates $n \times T_E$, T_E désignant la période d'échantillonnage.

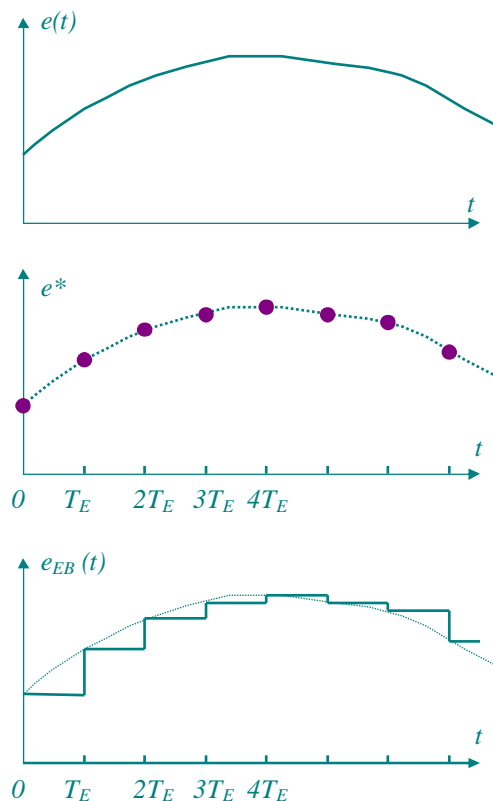
Le « signal » e^* obtenu est ainsi la **suite discrète des valeurs $e(nT_E)$** .

e^* n'est pas défini en dehors des dates $n \times T_E$. Ça n'est donc pas un signal, au sens où nous l'entendons habituellement. (on parle en mathématiques de distribution)

Le convertisseur analogique-numérique, placé en aval, ne peut pas traiter e^* : Une conversion nécessite en effet un certain **temps de calcul** (t_C) ; il est impératif de maintenir constante la tension appliquée à l'entrée du convertisseur, pendant une durée au moins égale à ce temps de calcul t_C !

C'est le rôle du **bloqueur d'ordre zéro** : Ce circuit reçoit en entrée le « signal échantillonné » e^* , et maintient en sortie la valeur de chaque échantillon, pendant une certaine durée t_B . (on adopte souvent $t_B = T_E$, mais ça n'est pas une obligation) Le bloqueur élabore ainsi le signal $e_{EB}(t)$.

Le convertisseur analogique-numérique transforme alors chaque « palier » de $e_{EB}(t)$ en un nombre binaire e_n ; on obtient enfin la séquence $\{e_n\}$ qui est transmise à l'unité de calcul numérique.



1.2.2 Calcul numérique .

A partir de la suite $\{e_n\}$, l'unité de calcul élabore une suite de nombres $\{s_n\}$, également avec une cadence de rafraîchissement fixée par f_E .

Les seules opérations élémentaires que doit savoir réaliser cette unité sont :

- Addition de 2 nombres :



- Multiplication par une constante :
(équivalent numérique de l'amplification)



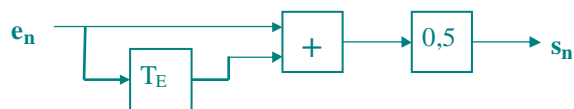
- Mémorisation durant k périodes
d'échantillonnage :



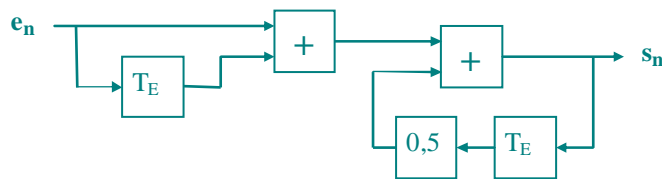
Ces opérations élémentaires sont combinées au sein d'un **programme** , afin de réaliser des calculs plus complexes. La relation qui définit le nombre s_n , présent à la sortie du calculateur à la date nT_E , en fonction du nombre présent à l' entrée, à la même date, et éventuellement en fonction de nombres d'entrée ou de sortie antérieurs, se nomme **algorithme de calcul** . (encore appelé **équation de récurrence**)

Exemples :

- $s_n = 0,5 \times (e_n + e_{n-1})$:



- $s_n = e_n + e_{n-1} + 0,5 \times s_{n-1}$:

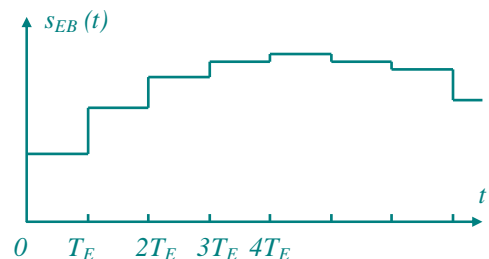


Remarquer que le deuxième algorithme est modélisable par un schéma s'apparentant à un système bouclé ; tout comme dans le domaine analogique, l'existence d'une boucle d'information peut entraîner des problèmes de stabilité !

1.2.3 Restitution .

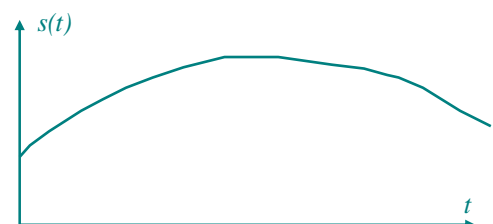
Le système de restitution doit élaborer le signal analogique $s(t)$, à partir d'une séquence de nombres $\{s_n\}$; il comprend essentiellement un convertisseur numérique-analogique, associé à un filtre passe bas de lissage.

Les nombres s_n , apparaissant à la cadence f_E en sortie du calculateur, sont convertis en une tension $s_{EB}(t)$ qui présente un aspect tel que celui donné ci-contre.
(Le convertisseur numérique-analogique s'apparente à un bloqueur)



Il reste à « lisser » ce signal. Cette fonction est assurée par un filtre passe-bas ; pour obtenir une efficacité correcte, la bande passante de ce filtre devra être choisie bien inférieure à la fréquence d'échantillonnage.

On peut donc déjà remarquer que les signaux ainsi traités par une telle chaîne devront être de fréquences largement inférieures à la fréquence d'échantillonnage f_E !



1.3 Inconvénients de la quantification.

Soit un signal analogique $x(t)$ que l'on désire numériser.

L'opération de quantification consiste à attribuer, à chaque échantillon de $x(t)$ une valeur numérique x_k égale à un multiple entier d'une valeur élémentaire appelée quantum que nous notons q : $x_k = k \cdot q$.

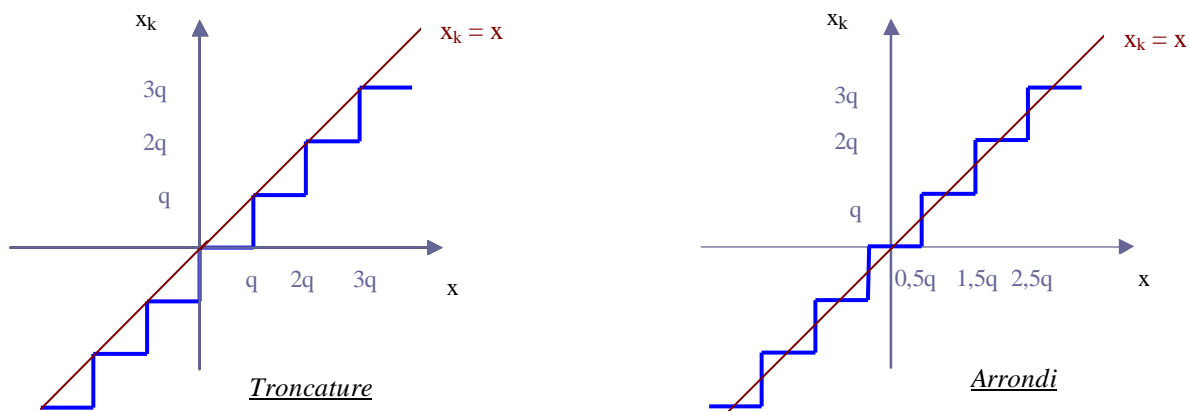
La valeur q de ce quantum est une caractéristique du convertisseur analogique-numérique utilisé. (elle est fonction du nombre de bits de codage et de la tension pleine échelle du convertisseur)

Le problème est évident : Pour que le nombre x_k résultant de la conversion varie, il est nécessaire que le signal $x(t)$ varie d'une hauteur au moins égale à celle du quantum q ! En d'autres termes, l'écart entre $x(t)$ et x_k peut atteindre q . L'écart $x(t) - x_k$ se nomme erreur de quantification.

Le système de quantification peut travailler de 2 manières : Par troncature ou par arrondi.

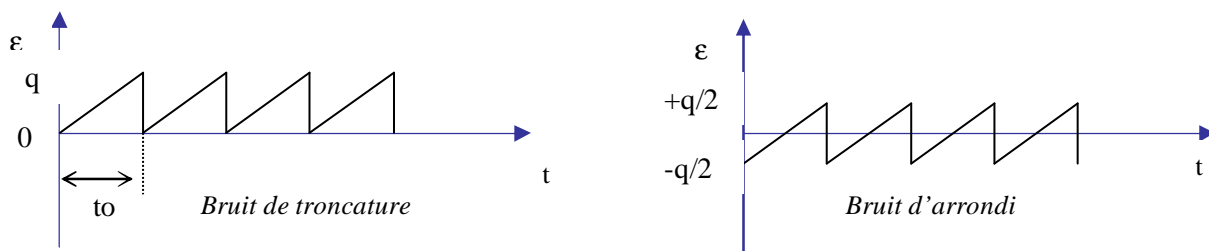
Exemple : Soit un quantum égal à 1 ; soient les 2 valeurs de x suivantes 3,25 et 3,70 ; par troncature, ces valeurs seront transformées toutes deux en 3, alors que, par arrondi, 3,25 donnera 3 et 3,75 donnera 4.

Il en résulte les caractéristiques de transfert $x_k = f(x)$ ci-dessous :



La conséquence de cette opération est que le quantificateur fournit un signal différent du signal réel : Tout se passe comme si le signal initial $x(t)$ était « bruité » par un signal d'erreur ϵ tel que : $x_k = x(t) - \epsilon$. Sur les graphiques ci-dessus, l'erreur par troncature est à valeur moyenne sensiblement égale à $q/2$, alors que l'erreur par arrondi est à valeur moyenne nulle.

Estimons maintenant la puissance du « bruit » ϵ , donnée par le carré de sa valeur efficace : Prenons l'exemple simple où $x(t)$ est une rampe ; l'erreur de quantification $\epsilon = x(t) - x_k$ aura l'une des deux allures ci-dessous :



Valeur efficace du bruit de troncature : $\epsilon^2 = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \left(\frac{q}{t_0} \cdot t \right)^2 dt = \frac{q^2}{3}$

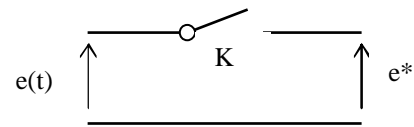
Valeur efficace du bruit d'arrondi : $\epsilon^2 = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \left(\frac{-q}{2} + \frac{q}{t_0} t \right)^2 dt = \frac{q^2}{12}$

On peut constater que le bruit d'arrondi a une valeur efficace deux fois moindre ; il en résulte que la plupart des quantificateurs procèdent par arrondi.

2. LES SIGNAUX ÉCHANTILLONNÉS

Nous avons vu précédemment qu'un « signal » échantillonné n'était, à proprement parler pas un signal au sens où on l'entend généralement. Toutefois, il est possible d'envisager la structure de principe d'un système échantillonneur :

Dans le montage élémentaire ci-contre, l'interrupteur K est manœuvré à la fréquence d'échantillonnage f_E , avec un rapport cyclique α ; si ce rapport cyclique tend vers zéro, (durée de fermeture infiniment faible) le système prélève bien les valeurs de $e(t)$ à la date de fermeture et peut constituer un échantillonneur.



Il est ainsi possible de définir un équivalent d'un signal échantillonné en écrivant :

$$e^* = e(t) \times p(t)$$

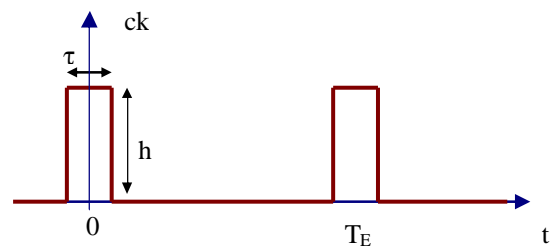
où $p(t)$ est une suite d'impulsions de Dirac de fréquence f_E . (dite "**peigne de Dirac**")

Dans ces conditions, sachant que $p(t)$ est périodique, et connaissant la décomposition spectrale de $e(t)$, on doit pouvoir établir la décomposition spectrale de e^* !

2.1 Spectre d'une fonction « Peigne de Dirac » .

Considérons une fonction « horloge », $ck(t)$, telle que celle représentée ci-contre :

La fonction « peigne de Dirac » $p(t)$ correspond à la limite de $ck(t)$, lorsque $\tau \rightarrow 0$, avec $h \times \tau = 1$.



Etablissons d'abord la décomposition de $ck(t)$:

Sa valeur moyenne est $\frac{h \times \tau}{T_E} = \frac{1}{T_E}$, compte tenu de $h \times \tau = 1$

$ck(t)$ est paire, donc sa décomposition en série de Fourier ne renferme que des termes en cosinus ; pour l'harmonique de rang n , nous aurons :

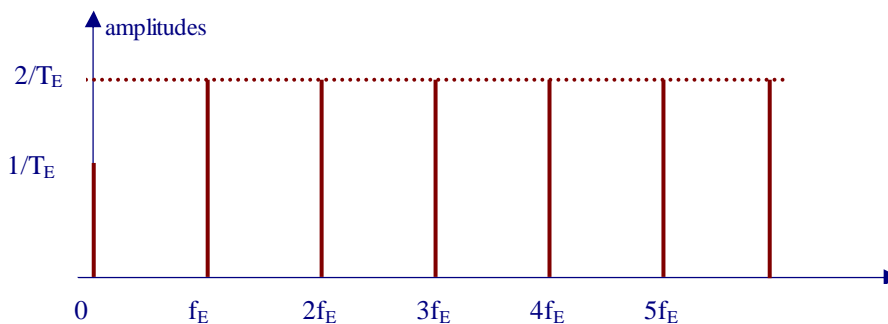
$$a_n = \frac{2}{T_E} \int_0^{T_E} ck(t) \cdot \cos(2n\pi f_e t) \cdot dt = \frac{4}{T_E} \int_0^{\frac{\tau}{2}} h \cdot \cos(2n\pi f_e t) \cdot dt = \frac{4h}{T_E} \left[\frac{\sin(2n\pi f_e t)}{2n\pi f_e} \right]_0^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2h}{T_E} \cdot \frac{\sin(n\pi f_e \tau)}{n\pi f_e}$$

soit, en multipliant par τ : $a_n = \frac{2}{T_E} \cdot \frac{\sin(n\pi f_e \tau)}{n\pi f_e \tau}$

$$\text{Il vient alors : } ck(t) = \frac{1}{T_E} + \frac{2}{T_E} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\pi f_e \tau)}{n\pi f_e \tau} \cdot \cos(2n\pi f_e t)$$

Pour obtenir l'expression de la fonction « peigne de Dirac », nous faisons tendre τ vers zéro dans $ck(t)$; nous obtenons : $p(t) = \frac{1}{T_E} + \frac{2}{T_E} \sum_{n \geq 1} \cos(2n\pi f_e t)$ (on rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

La représentation du spectre d'amplitude de $p(t)$ est alors la suivante :



Mise à part la composante continue, toutes les raies ont la même amplitude $2/T_E$.

2.2 Spectre d'une tension sinusoïdale échantillonnée.

Soit la tension analogique $e(t) = \hat{E} \cdot \sin 2\pi f t$ qu'on échantillonne à la fréquence f_E .

D'après ce qui a été vu au §2.1, le résultat s'écrit : $e^* = e(t) \times p(t) = e(t) \times \left\{ \frac{1}{T_E} + \frac{2}{T_E} \sum_{n \geq 1} \cos(2n\pi f_E t) \right\}$

soit, en se rappelant que $\sin a \cdot \cos b = 0,5 \times \sin(a + b) + 0,5 \times \sin(a - b)$:

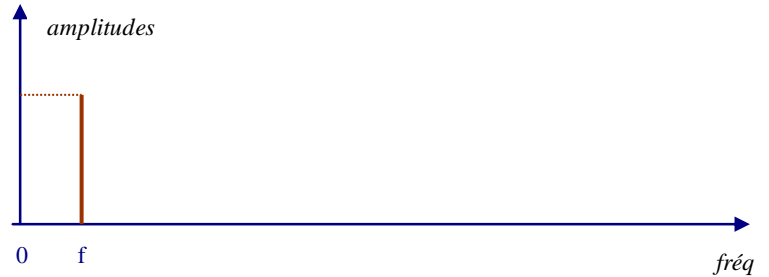
$$e^* = \frac{\hat{E}}{T_E} \sin \omega t + \frac{\hat{E}}{T_E} \sum_{n \geq 1} (\sin(n\omega_E + \omega)t - \sin(n\omega_E - \omega)t) = \frac{\hat{E}}{T_E} \sin 2\pi f t + \frac{\hat{E}}{T_E} \sum_{n \geq 1} (\sin 2\pi(nf_E + f)t - \sin 2\pi(nf_E - f)t)$$

e^* renferme des composantes aux fréquences $f, f_E - f, f_E + f, 2f_E - f, 2f_E + f, \dots$
 $\dots nf_E - f, nf_E + f, \dots$

ces composantes ont toutes

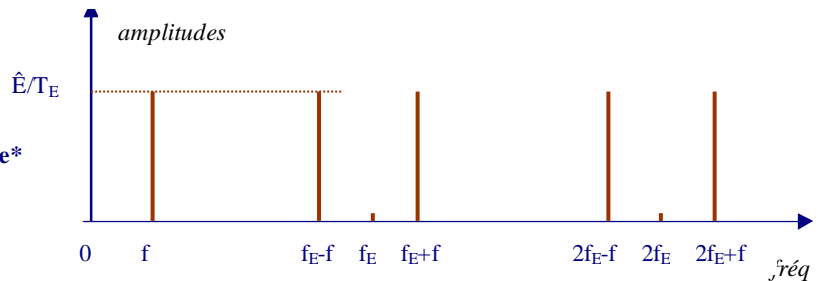
la même amplitude $\frac{\hat{E}}{T_E}$

Spectre de $e(t)$



Le spectre de e^* est ainsi constitué du spectre de $e(t)$ et de ses répliques, de part et d'autre des multiples de la fréquence d'échantillonnage.

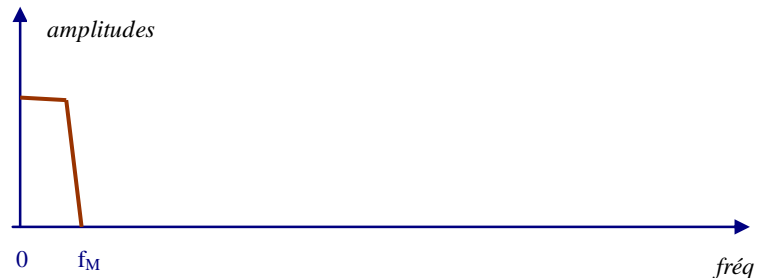
Spectre de e^*



2.3 Echantillonnage d'un signal quelconque

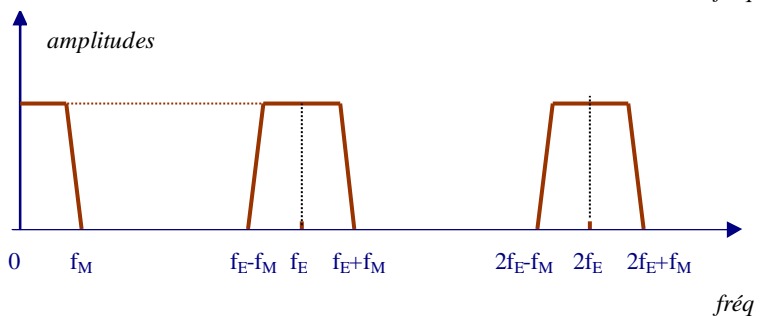
Considérons maintenant un signal $e(t)$, dont le spectre s'étend jusqu'à une fréquence maximale f_M .

Spectre de $e(t)$



Par extension du raisonnement, nous obtiendrons, pour e^* , le même phénomène de réplication du spectre de $e(t)$ autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage.

Spectre de e^*



2.4 Théorème de SHANNON.

Supposons que l'unité de calcul numérique effectue l'opération identité, c'est à dire élabore la séquence $\{s_n\}$ définie par $\{s_n\} = \{e_n\}$. Il doit être alors possible de restituer le signal initial $e(t)$ en fin de chaîne.

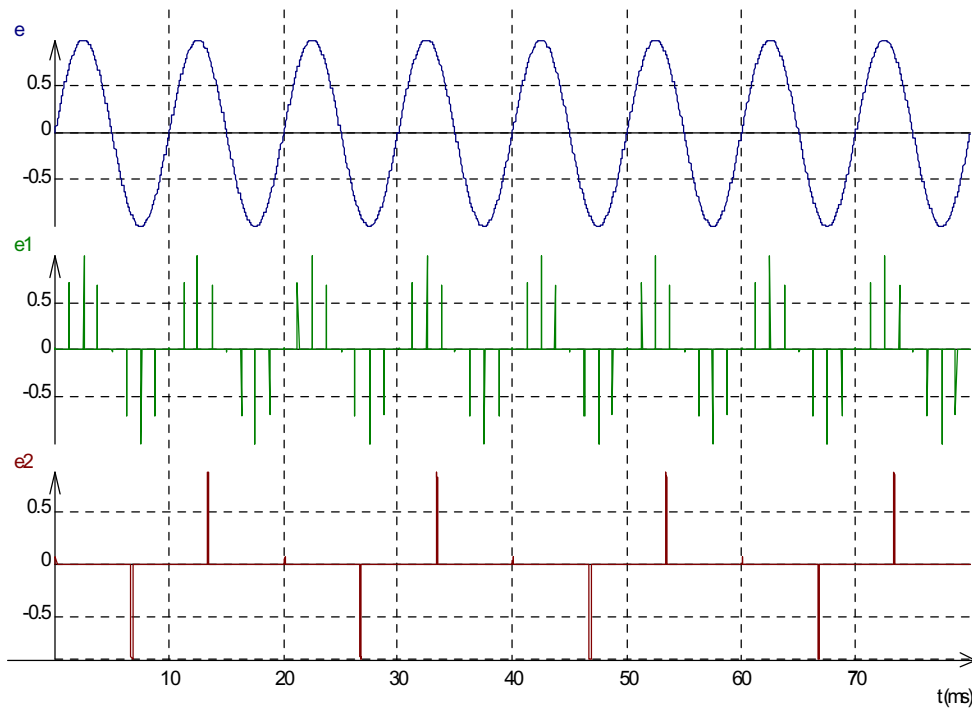
Pour qu'il en soit ainsi, le spectre de $e(t)$ doit être « isolable » (par un filtre passe bas) ; ceci ne sera possible que si, dans le spectre de e^* , la fréquence f_M est placée **avant** la fréquence $f_E - f_M$!

La condition d'un échantillonnage satisfaisant est : $f_M < f_E - f_M$ soit $f_E > 2 \cdot f_M$ (condition de Shannon)

D'où le théorème :

Pour échantillonner un signal sans perte d'informations, la valeur de la fréquence d'échantillonnage doit être au minimum double de celle de la fréquence maximale du spectre du signal échantillonné.

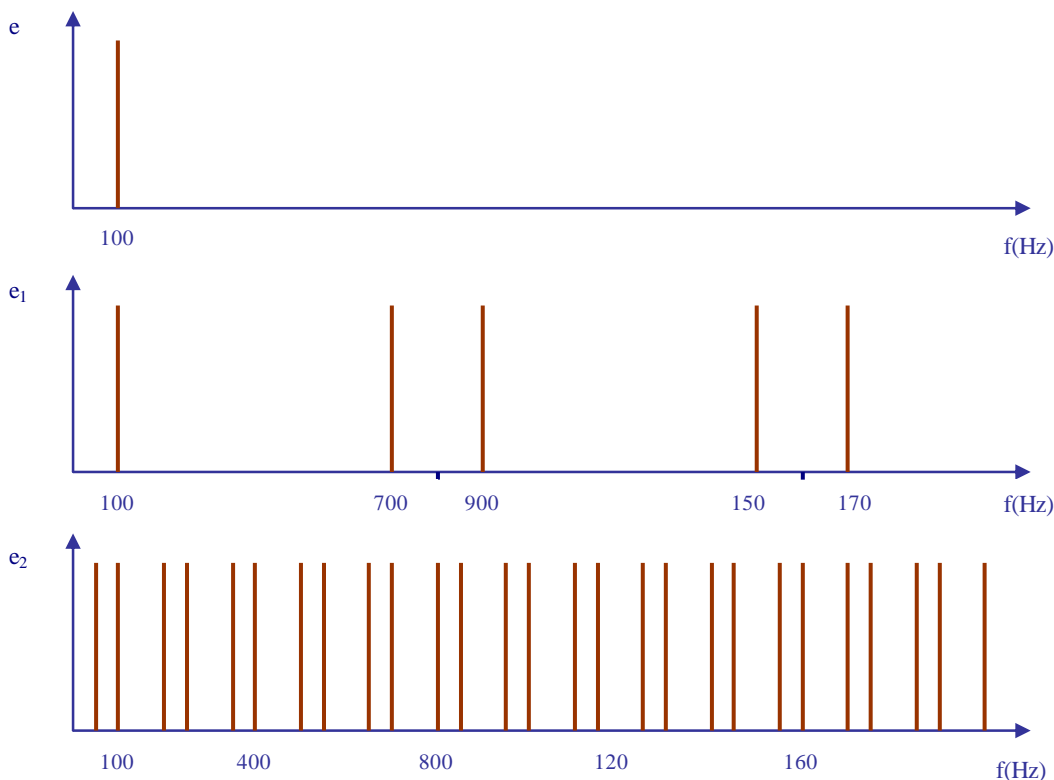
A titre d'exemple, on donne ci-dessous un signal sinusoïdal $e(t)$, de fréquence $f = 100$ Hz, le résultat e_1 de son échantillonnage à la fréquence $f_{E1} = 800$ Hz et le résultat e_2 de son échantillonnage à la fréquence $f_{E2} = 150$ Hz :



Le signal e_1 respecte le théorème de Shannon : La fréquence de e_1 est bien $f = 100$ Hz.

Par contre, e_2 apparaît de fréquence 50 Hz : Nous avons ici un phénomène de **repliement du spectre**, c'est à dire que la fréquence de e_2 n'est plus f , mais $f_{E2} - f$! ($150 - 100 = 50$ Hz).

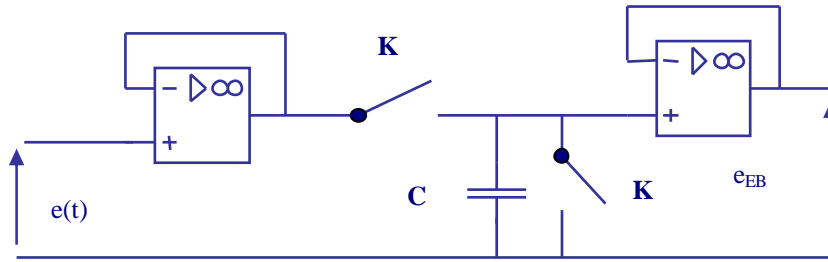
La figure ci-dessous représente les spectres des signaux $e(t)$, $e_1(t)$ et $e_2(t)$:



Dans le cas où le signal à échantillonner est quelconque, il est nécessaire de borner son spectre, de façon à éviter ce phénomène de repliement : L'échantillonneur est ainsi souvent précédé d'un **filtre anti-repliement** ; il s'agit d'un filtre passe bas, de bande passante limitée à $f_E / 2$, et d'ordre élevé (4 ou plus).

2.5 Signal échantillonné et bloqué.

L'échantillonneur est associé à un **bloqueur d'ordre zéro** : Ce dispositif permet de maintenir constante, pendant une durée θ l'échantillon prélevé. Un exemple structurel rudimentaire en est donné ci-dessous :



Pendant une période d'échantillonnage (entre une date nT_E et une date $(n+1)T_E$), K1 est d'abord fermé un court instant, afin de charger la capacité C à la valeur de l'échantillon de $e(t)$, soit $e(nT_E)$, puis est ouvert ; K2 reste d'abord ouvert de nT_E à $nT_E + \theta$, puis est fermé de $nT_E + \theta$ à $(n+1)T_E$. $e_{EB}(t)$ garde ainsi la valeur $e(nT_E)$ pendant la durée de blocage θ .

Le premier suiveur assure une forte impédance d'entrée au système, et permet de minimiser la constante de temps de charge du condensateur ; le second suiveur permet d'éviter la décharge intempestive du même condensateur dans le circuit placé en aval.

2.5.1. Transmittance d'un bloqueur.

Attaqué par une impulsion, un bloqueur élabore un créneau de largeur θ .

Ainsi, pour $E(p) = 1$, il vient : $S(p) = \frac{1 - e^{-p\theta}}{p}$

La transmittance opérationnelle du bloqueur est :

$$T(p) = \frac{1 - e^{-p\theta}}{p}$$

Pour le régime sinusoïdal établi, nous aurons :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\theta}}{j\omega} = e^{-j\frac{\omega\theta}{2}} \times \frac{e^{+j\frac{\omega\theta}{2}} - e^{-j\frac{\omega\theta}{2}}}{j\omega} = 2 \sin\left(\frac{\omega\theta}{2}\right) \times e^{-j\frac{\omega\theta}{2}}$$

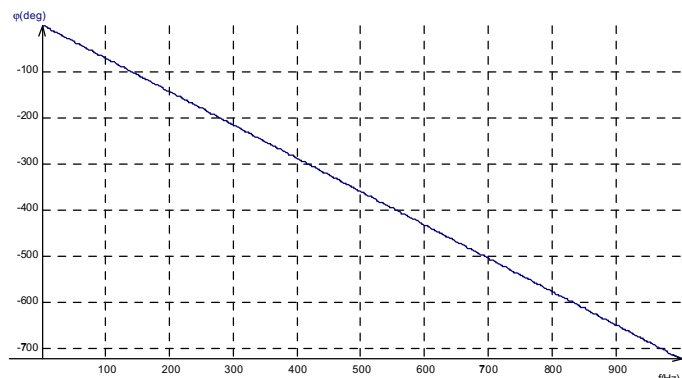
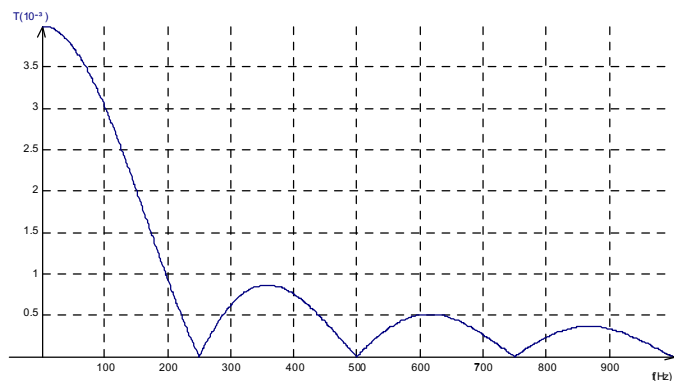
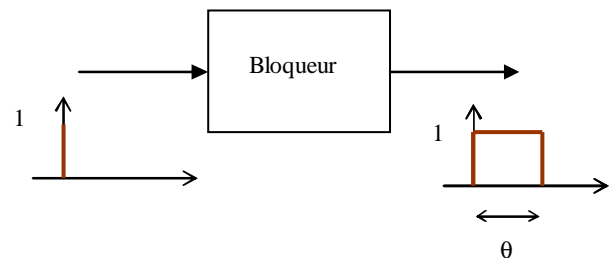
soit : $\underline{T}(j\omega) = \theta \times \frac{\sin\left(\frac{\omega\theta}{2}\right)}{\frac{\omega\theta}{2}} \times e^{-j\frac{\omega\theta}{2}}$

en fonction de la fréquence f , il vient :

$$\text{mod}(\underline{T}) = \theta \times \left| \frac{\sin \pi f \theta}{\pi f \theta} \right|$$

$$\text{arg}(\underline{T}) = -\pi f \theta$$

Les représentations correspondantes sont données ci-contre :
(Les courbes sont tracées pour une valeur de θ de 4ms)



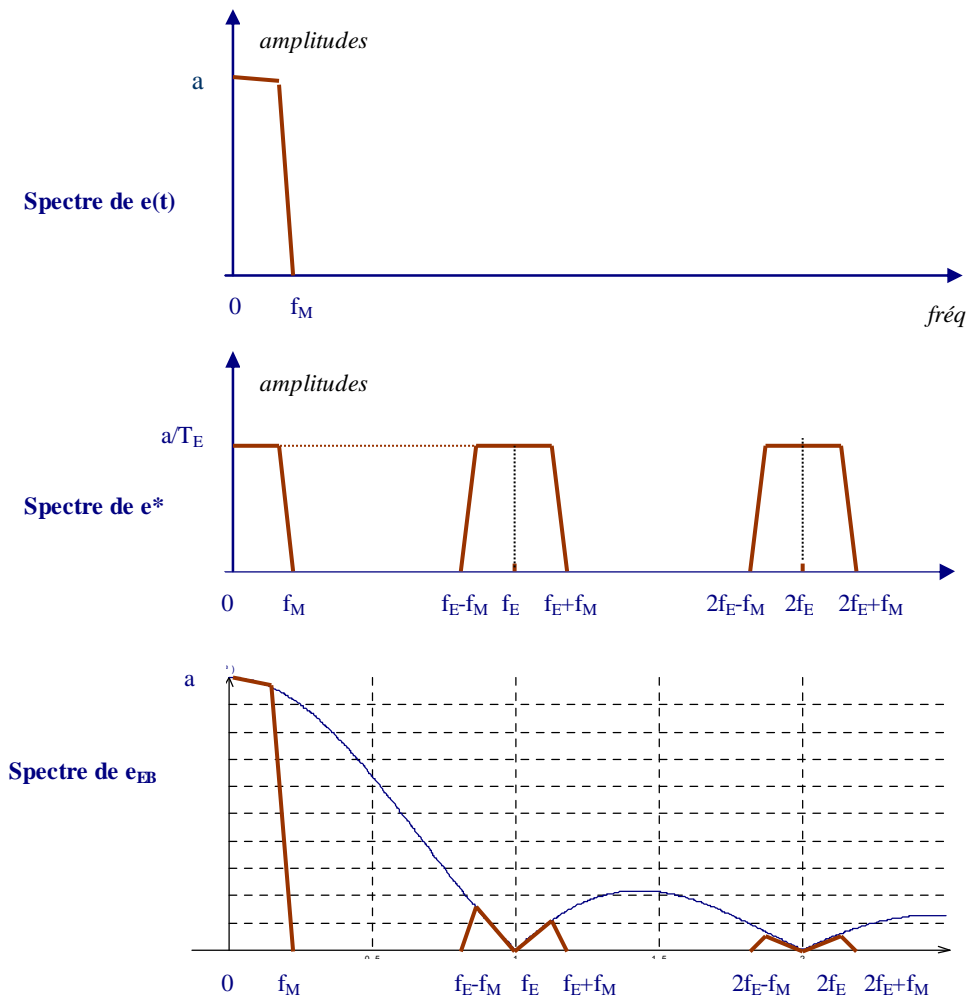
2.5.2 Spectre du signal échantillonné et bloqué.

Considérons un signal $e(t)$, dont le spectre est borné par une fréquence f_M et un système échantillonneur à la fréquence f_E . ($f_E > 2 \times f_M$)

Le plus souvent, le bloqueur a une durée d'action $\theta = T_E$. Sa transmittance s'annule donc pour les fréquences multiples de $1/\theta$, c'est à dire les fréquences multiples de f_E .

Dans ces conditions, les amplitudes des diverses répliques du spectre de $e(t)$ vont être « modulées » par l'action du bloqueur, comme le montrent les graphiques ci-dessous :

Lorsque la durée de blocage est égale à la période d'échantillonnage T_E , les répliques du spectre de $e(t)$ sont très fortement atténuées .



Nous pouvons constater que, si la fréquence maximale contenue dans le spectre de $e(t)$ est faible devant la fréquence d'échantillonnage f_E , alors le premier lobe du spectre de e_{EB} (de $f = 0$ à $f = f_M$) reproduit assez fidèlement le spectre de $e(t)$.